在处理工程问题时，希望以最小的成本获得快速准确的解决方案。大多数工程问题，包括与流体流动相关的问题，都可以使用三种基本方法之一进行分析：微分、实验和控制体积。在微分方法中，问题是使用微分量精确地表述出来的，但是所得微分方程的求解很困难，通常需要使用具有大量计算机代码的数值方法。辅以尺寸分析的实验方法非常准确，但它们通常既耗时又昂贵。本章中描述的有限控制体积方法非常快速和简单，并且通常给出的答案对于大多数工程目的来说都足够准确。因此，尽管涉及近似，但用纸和笔进行的基本有限控制体积分析一直是工程师必不可少的工具。第5章介绍了流体流动系统的控制体积质量和能量分析。在本章中，我们介绍了流体流动问题的有限控制体积动量分析。首先，我们概述了牛顿定律以及线性和角动量的守恒关系。然后使用雷诺传输定理，我们开发了用于控制体积的线性动量和角动量方程，并使用它们来确定与流体流动相关的力和扭矩。

**6-1 牛顿定律** 2021年7月12日15点21分

牛顿定律是物体运动与作用在物体上的力之间的关系.牛顿第一定律指出,静止的物体保持静止,而当作用在其上的合力为零时,运动的物体仍以相同的速度沿直线运动.因此,物体倾向于保持其惯性状态.牛顿第二定律指出,物体的加速度与作用在其上的合力成正比,与其质量成反比.牛顿第三定律指出,当一个物体对第二个物体施加力时,第二个物体对第一个物体施加相等且相反的力.因此,暴露的反作用力的方向取决于作为系统的物体.

对于质量为m的刚体,牛顿第二定律表示为:

其中是作用在物体上的合力,是物体在影响下的加速度.

物体的质量和速度的乘积称为线性动量或只是物体的动量.质量为的刚体以速度运动的动量是(图6-1).那么方程6-1中表达的牛顿第二定律也可以表述为物体动量的变化率等于作用在物体上的合力(图 6-2).这种说法更符合牛顿第二定律的原始说法,更适合在流体力学中研究流体流速度变化所产生的力时使用.因此,在流体力学中,牛顿第二定律通常被称为**线性动量方程**.

只有当作用在系统上的合力为零时,系统的动量才保持恒定,因此该系统的动量守恒.这被称为**动量守恒原理**.事实证明,在分析球之间的碰撞等碰撞时,该原理是非常有用的工具;在球和球拍,球棒或球杆之间;以及原子或亚原子粒子之间;和爆炸,例如发生在火箭,导弹和枪支中的爆炸.然而,在流体力学中,作用在系统上的合力通常不为零,我们更喜欢使用线性动量方程而不是动量守恒原理.

请注意,力,加速度,速度和动量是矢量,因此它们具有方向和大小.此外,动量是速度的常数倍,因此动量的方向就是速度的方向,如图6-1所示.任何矢量方程都可以用大小写成指定方向的标量形式,例如,在方向上,.

刚体旋转的牛顿第二定律的对应表达式为,其中是施加在物体上的净力矩或扭矩,是物体绕旋转轴的转动惯量,而是角加速度.它也可以用角动量的变化率表示为,

其中是角速度.对于绕固定x轴旋转的刚体,角动量方程以标量形式写成,

角动量方程可以表述为物体角动量的变化率等于作用在其上的净扭矩(图6-3).

当作用在旋转体上的净扭矩为零时,旋转体的总角动量保持不变,因此此类系统的角动量守恒.这被称为**角动量守恒原理**,表示为常数.许多有趣的现象,例如滑冰运动员将手臂靠近身体时旋转速度更快,而潜水员在跳跃后弯举时旋转速度更快.在角动量守恒原理的帮助下很容易解释(在这两种情况下,惯性矩I减小,因此角速度𝜔随着身体的外部部分靠近旋转轴而增加).

**6-2 选择一个控制体积** 2021年7月12日15点38分

我们现在简要讨论如何明智地选择控制体积.控制体积可以选择为空间中任何流体流动通过的任意区域,其边界控制面在流动过程中可以固定,移动甚至变形.基本守恒定律的应用是对所考虑的数量进行簿记或计算的系统程序,因此在分析期间明确定义控制体积的边界极为重要.此外,流入或流出控制体积的任何量的流速取决于相对于控制面的流速,因此必须知道控制体积在流动期间是否保持静止或是否移动.

许多流动系统涉及牢固地固定在固定表面上的固定硬件,最好使用固定控制体积来分析此类系统.例如,当确定作用在固定软管喷嘴的三脚架上的反作用力时,自然选择的控制体积是垂直穿过喷嘴出口流和三脚架腿底部的控制体积(图6-4a).这是一个固定的控制体积,相对于地面固定点的水流速度与相对于喷嘴出口平面的水流速度相同.

在分析移动或变形的流动系统时,允许控制体积移动或变形通常更方便.例如,当确定以恒定速度巡航的飞机的喷气发动机产生的推力时,明智地选择控制体积是包围飞机并穿过喷嘴出口平面的控制体积(图6-4b).在这种情况下,控制体积以速度移动,该速度与飞机相对于地球上固定点的巡航速度相同.在确定离开喷嘴的废气流速时,使用的适当速度是废气相对于喷嘴出口平面的速度,即相对速度.由于整个控制体积以速度移动,因此相对速度变为,其中是废气的绝对速度,即相对于地球上固定点的速度.请注意,是相对于随控制体积移动的坐标系统表示的流体速度,此外,这是一个矢量方程,相反方向的速度具有相反的符号,例如,如果飞机以500公里/小时的速度向左巡航,而废气相对于地面向右的速度为800公里/小时,则废气相对于喷嘴出口的速度为,

也就是说,废气以1300公里/小时的速度离开喷嘴,相对于喷嘴出口的右侧(与飞机相反的方向);这是评估通过控制面的废气流出量时应使用的速度(图6-4b).请注意,如果相对速度在大小上与飞机速度相等,那么地面上的观察者会看到废气是静止的.

在分析往复式内燃机的排气净化时,明智的选择是控制容积包括活塞顶部和气缸盖之间的空间(图6-4c).这是一个变形控制体积,因为控制面的一部分相对于其他部分移动.控制面变形部分的入口或出口的相对速度(图6-4c中没有这样的入口或出口)由给出,其中是绝对流体速度,是控制表面速度，两者都相对于控制体积外的固定点.请注意,对于移动但不变形的控制体积,,对于固定体积,.

**6-3 作用在控制体积上的压力** 2021年7月12日16点12分

作用在控制体积上的力包括作用在控制体积整个物体上的**物体力**(如重力,电力和磁力)和作用在控制面上的**表面力**(如接触点处的压力,粘性力和反作用力).分析中只考虑外力.控制体积分析中不考虑内部力(例如流体和流动截面内表面之间的压力),除非它们通过使控制表面通过该区域而暴露出来.

在控制体积分析中,在特定时刻作用在控制体积上的所有力的总和由表示,并表示为,

物体力作用于控制体积的每个体积部分.作用在控制体积内体积为的流体微分元素上的物体力如图 6-5 所示,我们必须进行体积积分以计算整个控制体积上的净体力.表面力作用在操纵面的每个部分上.控制面上面积为和单位外法线的微分表面元如图6-5所示,以及作用在其上的表面力.我们必须进行面积积分以获得作用在整个控制面上的净表面力.如图所示,表面力的作用方向可能与外向法向量的方向无关.

最常见的体力是**重力**,它对控制体积的每个微分元件施加向下的力.虽然其他体力,如电力和磁力,在某些分析中可能很重要,但我们在这里只考虑重力.

作用在图6-6所示的小流体元素上的微分体力就是它的重量,

其中𝜌是元素的平均密度,是重力矢量.在笛卡尔坐标系中,我们采用作用在负方向的约定,如图 6-6 所示,因此,

请注意,图6-6中的坐标轴是定向的,因此重力矢量在-z方向上向下作用.在海平面的地球上,重力常数等于.由于重力是唯一被考虑的物体力,方程6-5的积分产生

表面力并不那么容易分析,因为它们由法向分量和切向分量组成.此外,虽然作用在表面上的物理力与坐标轴的方向无关,但根据其坐标分量对力的描述随方向而变化(图6-7).此外,我们很少有幸让每个控制面与坐标轴之一对齐.虽然不想深入研究张量代数,但我们不得不定义一个称为**应力张量**的**二阶张量**,以便充分描述流动中某一点的表面应力,

应力张量的对角线分量和,称为**正应力[normal stresses]**;它们由压力(总是向内正常作用)和粘性应力组成.第9章更详细地讨论了**粘性应力**.非对角线分量等称为剪应力;由于压力只能作用于表面的法向,因此剪切应力完全由粘性应力组成.

当面与坐标轴之一不平行时,轴旋转和张量的数学定律可用于计算作用在面上的法向和切向分量.此外,在使用张量时,称为张量表示法的替代表示法很方便,但通常保留用于研究生学习.(有关张量和张量符号的更深入分析,请参见,例如，Kundu 和 Cohen，2011.)

在等式6-8中,被定义为作用在方向上的应力(每单位面积的力)法线在方向的面.请注意,和只是张量的索引,与单位向量和不同.例如,被定义为指向外法线在方向的面上方向的应力的正值.在图6-8中显示了应力张量的这个分量以及其他八个分量,用于与笛卡尔坐标中的轴对齐的微分流体元素的情况.根据定义,图6-8中的所有组件都显示在正面(右侧,顶部和正面)和它们的正方向上.流体元件(未显示)相对面上的正应力分量指向完全相反的方向.

二阶张量和向量的点积产生第二个向量;此操作通常称为张量和向量的**收缩积**或**内积**.在我们的例子中,结果证明应力张量和微分表面元的单位外法向量的内积产生一个向量,其大小是作用在表面元上的每单位面积的力,其方向是方向表面力本身.我们在数学上写,

最后,我们在整个控制面上积分方程6-9,

将方程6-7和6-10代入方程6-4得到,

这个方程在推导线性动量守恒的微分形式时非常有用,如第9章所述.然而,对于实际的控制体积分析,我们很少需要使用方程6-11,尤其是它包含的繁琐的曲面积分.

仔细选择控制体积使我们能够将作​​用在控制体积上的总力 写成重量,压力和反作用力等更容易获得的量的总和.我们推荐以下控制体积分析:

公式6-12右侧的第一项是物体力力权重,因为重力是我们正在考虑的唯一物体力.其他三项结合起来形成净表面力;它们是作用在操纵面上的压力,粘性力和“其他”力.由转动流动所需的反作用力组成;螺栓,电缆,支柱或控制面穿过的墙壁上的力;等等.

所有这些表面力都是在控制体积与其周围环境隔离以进行分析时产生的,并且任何分离对象的影响都由该位置的力来解释.这类似于在静态和动态类中绘制自由体图.我们应该选择控制体积,使不感兴趣的力保持在内部,因此它们不会使分析复杂化.精心选择的控制体积仅暴露要确定的力(例如反作用力)和最少数量的其他力.

应用牛顿运动定律的一个常见简化是减去大气压力并使用表压.这是因为大气压力作用于各个方向,其作用在各个方向上相互抵消(图6-9).这意味着我们还可以忽略流体以亚音速排放到大气的出口部分的压力,因为在这种情况下,排放压力非常接近大气压力.

作为如何明智地选择控制量的示例,请考虑对稳定流过带有部分关闭闸阀龙头的水龙头的水进行控制量分析(图6-10).需要计算法兰上的净力,以确保法兰螺栓足够坚固.控制体积有多种可能的选择.一些工程师将他们的控制体积限制为流体本身,如图6-10中的CV A(紫色控制体积)所示.对于这个控制体积,有沿着控制面变化的压力,沿着管壁和阀门内部的位置有粘性力,还有一个体力,即控制体积中水的重量.幸运的是,为了计算法兰上的净力,我们不需要整合整个控制面上的压力和粘性应力.相反,我们可以将未知的压力和粘性力合并为一个反作用力,代表水面壁的净力.这个力加上水龙头和水的重量,等于法兰上的净力.(当然,我们必须非常小心我们的符号.)

在选择控制体积时,您不仅限于流体.通常更方便的是,通过固体对象(例如墙,支柱或螺栓)对控制面进行切片,如图6-10中的CV B(红色控制体积)所示.一个控制体积甚至可以包围整个对象,就像这里显示的那样.控制体积B是一个明智的选择,因为我们不关心流动的任何细节,甚至控制体积内的几何形状.对于CV B的情况,我们分配了一个净反作用力,作用在控制表面的切开法兰螺栓的部分上.然后,我们唯一需要知道的其他事情是法兰(控制容积的入口)处水的表压以及水和水龙头组件的重量.沿操纵面其他地方的压力是大气压(零表压)并相互抵消.这个问题在第6-4节的示例6-7中重新讨论.

**6-4 线性动量方程** 2021年7月12日17点38分

质量为的系统受到合力的牛顿第二定律表示为,

其中是系统的**线性动量**.注意到密度和速度都可能在系统内从一点到另一点发生变化,牛顿第二定律可以更一般地表示为,

其中是微分元素的动量,其质量为.因此,牛顿第二定律可以表述为**作用在系统上的所有外力之和等于系统线性动量的时间变化率**.该语句适用于静止或匀速运动的坐标系,称为惯性坐标系或惯性参考系.最好使用固定在飞机上的非惯性(或加速)坐标系来分析起飞期间的飞机等加速系统.请注意,公式6-14是一个向量关系,因此量和具有方向和大小.

方程6-14适用于给定质量的固体或流体,在流体力学中使用有限,因为大多数流动系统是使用控制体积分析的.在第4-6节中开发的**雷诺输运定理**提供了从系统公式转换到控制体积公式的必要工具.设,因此,雷诺输运定理对于线性动量表示为(图6-11)

根据方程6-13,该方程的左边等于.代入,适用于固定,移动或变形控制体积的线性动量方程的一般形式是,

用文字表述为

这里是相对于控制面的流体速度(用于在流体穿过控制面的所有位置计算质量流量),并且是从惯性参考系观察的流体速度.乘积表示通过面积元素进入或离开控制体积的质量流量.

对于固定的控制体积(控制体积没有运动或变形),,线性动量方程变为

请注意,动量方程是一个向量方程,因此每一项都应视为向量.此外,为方便起见.该方程的分量可以沿正交坐标(例如笛卡尔坐标系中的和)求解.在大多数情况下,力的总和包括重量,压力和反作用力(图6-12).动量方程通常用于计算由流动引起的力(通常在支撑系统或连接器上).

**特例**

本书中考虑的大多数动量问题都是稳定的.在稳定流动期间,控制体积内的动量量保持恒定,因此控制体积内容物的线性动量的时间变化率(方程6-16的第二项)为零.因此,

对于非变形控制体积以恒定速度(惯性参考系)移动的情况,第一个方程6-18也可以相对于移动控制面采用.

虽然方程6-17对于固定控制体积是准确的,但在解决实际工程问题时并不总是方便,因为它是积分.相反,正如我们为质量守恒所做的那样,我们想根据通过入口和出口的平均速度和质量流量重写公式6-17.换句话说,我们的愿望是以代数而不是积分形式重写方程.在许多实际应用中,流体在一个或多个入口和一个或多个出口处穿过控制体积的边界,并携带一些动量进入或离开控制体积.为简单起见,我们总是绘制控制面,使其垂直于每个此类入口或出口处的流入或流出速度进行切片(图6-13).

质量流量在𝜌几乎恒定的入口或出口处进入或离开控制容积是,

将公式6-19与公式6-17进行比较,我们注意到公式6-17的控制面积分中有一个额外的速度.如果整个入口或出口的是均匀的(),我们可以简单地将其置于积分之外.然后我们可以用简单的代数形式写出通过入口或出口的动量流入或流出速率,

在一些入口和出口处,均匀流动近似是合理的,例如,管道的圆形入口,风洞测试部分入口处的流动,以及以几乎均匀的速度穿过空气的水射流切片(图6-14).在每个这样的入口或出口处,可以直接应用公式 6-20.

**动量-通量修正系数,**

不幸的是,大多数具有实际工程意义的入口和出口的速度并不均匀.尽管如此,事实证明我们仍然可以将方程6-17的控制面积分转换为代数形式,但是需要一个无量纲的校正因子𝛽,称为**动量-通量校正因子**,正如法国科学家Joseph Boussinesq(1842-1929).固定控制体积的方程6-17的代数形式然后写为,

其中动量通量校正因子的唯一值应用于控制表面的每个入口和出口.注意对于入口或出口均匀流动的情况,如图6-14所示.对于一般情况,我们定义使得在横截面积的入口或出口处进入或离开控制面的动量通量的积分形式可以用质量流量表示.

对于入口或出口密度均匀且与入口或出口上的方向相同的情况,我们求解方程6-22的𝛽,

其中我们用代替了分母中的.密度抵消,因为是常数,它可以带入积分内.此外,如果控制面垂直于入口或出口区域切片,则.则,等式6-23简化为,

可以证明𝛽总是大于或等于1.

从示例6-1中我们看到,对于完全发展的层流管流,𝛽不是非常接近1,而忽略𝛽可能会导致重大误差.如果我们执行与示例6-1中相同的积分,但对于完全发展的湍流而不是层流管流,我们会发现𝛽的范围从大约1.01到1.04.由于这些值非常接近1,许多实践工程师完全忽略了动量通量校正因子.虽然在湍流忽略𝛽计算可能对最终结果产生微不足道的影响,但将其保留在我们的方程中是明智的.这样做不仅提高了我们计算的准确性,而且提醒我们在解决层流控制体积问题时包括动量-通量校正因子.

对于湍流𝛽可能在进口和出口有一个不显著的影响,但对于层流𝛽可能是重要的,不应被忽视.将𝛽包含在所有动量控制量问题中是明智的.

**稳流**

如果流是稳定的,方程6-21中的时间导数项就消失了,剩下的是,

我们从平均速度中去掉了下标“avg”.方程6-25表明在稳定流动期间作用在控制体积上的合力等于流出和流入动量流的速率之差.该语句如图6-16所示.它也可以表示为任何方向,因为方程6-25是一个矢量方程.

**一个入口和一个出口的稳流**

许多实际工程问题只涉及一个入口和一个出口(图6-17).这种单流系统的质量流量保持恒定,公式6-25简化为:

我们采用了通常的约定,下标1表示入口,下标2表示出口,和分别表示穿过入口和出口的平均速度.

我们再次强调,前面的关系都是向量方程,因此所有的加法和减法都是向量加法和减法.回想一下,减去一个向量相当于在反转其方向后添加它(图6-18).在编写指定坐标方向(例如轴)的动量方程时,我们使用向量在该轴上的投影.例如,公式6-26沿坐标写成,

其中是力的分量的矢量和,和分别是流体流出口和入口速度的分量.正方向上的力或速度分量为正量,负方向上的力或速度分量为负量.此外,沿正方向取未知力的方向也是一种很好的做法(除非问题非常简单).为未知力获得的负值表示假定的方向是错误的,应该反转.

**无外力流动**

当没有外力(如重量,压力和反作用力)沿运动方向作用于物体时,就会出现一个有趣的情况——这是航天器和卫星的常见情况.对于具有多个入口和出口的控制体积,在这种情况下,公式6-21简化为:

这是动量守恒原理的一种表达,用文字表述为在没有外力的情况下,控制体积的动量变化率等于传入和传出动量流量的速率之差.

当控制体积的质量几乎保持不变时,方程6-28的第一项就变成了质量乘以加速度,因为,

因此,在这种情况下,控制体积可以被视为具有净推力(或只是)的固体(固定质量系统)

作用于物体.在方程6-29中,流体速度与惯性参考系有关,即空间固定的坐标系或在直线路径上匀速运动的坐标系.在分析匀速直线运动物体的运动时,选择一个与物体在同一路径上以相同速度运动的惯性参考系是很方便的.在这种情况下,流体流相对于惯性参考系的速度与相对于移动体的速度相同,这更容易应用.这种方法虽然对非惯性参考系不是严格有效的,但也可用于计算航天器发射火箭时的初始加速度(图6-19).

回想一下,推力是一种通常通过加速流体的反应产生的机械力.例如,在飞机的喷气发动机中,热废气通过发动机后部的膨胀和流出气体的作用而加速,并通过相反方向的反作用力产生推力.推力的产生基于牛顿第三运动定律,该定律指出,对于某一点的每一个动作,都会有一个相等且相反的反作用力.在喷气发动机的情况下,如果发动机对排气施加力,则排气在相反方向上对发动机施加相等的力.即,发动机对离去气体施加的推力等于离去气体对飞行器剩余质量施加的反方向推.在飞机的自由体图中,排出废气的影响是通过在废气运动的相反方向上插入一个力来解释的.

**6-5 回顾旋转运动和角动量** 2021年7月12日18点14分

刚体的运动可以认为是其质心的平移运动和绕其质心的旋转运动的组合.使用线性动量方程(方程6-1)分析平移运动.现在我们讨论旋转运动——在这种运动中,物体中的所有点都围绕旋转轴做圆周运动.旋转运动用角量来描述,例如角位移,角速度和角加速度.

物体中一点的旋转量用角度表示,该角由一条长度为的线扫过,该线将点连接到旋转轴并垂直于旋转轴.角度𝜃以弧度(rad)表示,它是单位半径圆上𝜃对应的弧长.注意到一个半径为的圆的周长是2𝜋r,在一个完整的旋转过程中,刚体中任意一点经过的角距离是2𝜋 rad.一个点沿其圆形路径移动的物理距离是,其中r是该点到旋转轴的法向距离,而𝜃是角距离,单位为 rad.请注意,1 弧度对应于 360/(2𝜋) = 57.3°.

角速度𝜔的大小是单位时间内行进的角距离,角加速度𝛼的大小是角速度的变化率.它们表示为(图6-28),

或

其中是线速度,是距离旋转轴距离为的点的切线方向的线加速度.请注意,𝜔和𝛼对于所有旋转刚体的点都相同,但和不是(它们与成正比).

牛顿第二定律要求必须有一个作用在切线方向的力才能引起角加速度.旋转效应的强度,称为**力矩[moment]**或**扭矩[torque]**,与力的大小及其与旋转轴的距离成正比.从旋转轴到力的作用线的垂直距离称为力矩臂,作用在距旋转轴法向距离为处的点质量上的扭矩M的大小表示为,

作用在绕轴旋转刚体上的总扭矩是通过对作用在整个物体上的微分质量上的扭矩进行积分来确定的,

其中是物体绕旋转轴的**惯性矩**,它是物体抵抗旋转的惯性的量度.关系是牛顿第二定律的对应关系,扭矩代替力,转动惯量代替质量,角加速度代替线性加速度(图6-29).请注意,与质量不同,物体的转动惯量还取决于物体质量相对于旋转轴的分布.因此,质量围绕其旋转轴紧密堆积的物体对角加速度的阻力很小,而质量集中在其周围的物体对角加速度的阻力很大.飞轮是后者的一个很好的例子.

速度为的质量为的物体的线动量是,线动量的方向与速度方向相同.注意到力的矩等于力与法向距离的乘积,点质量绕轴的动量矩的大小,称为**角动量**,表示为,其中r是从旋转轴到动量矢量作用线的法向距离(图6-30).那么旋转刚体的总角动量由积分确定为

其中是物体绕旋转轴的转动惯量.它也可以更一般地用向量形式表示为,

注意角速度在刚体的每个点上都是相同的.

牛顿第二定律在方程6-1中用线性动量的变化率表示为.同样,对于旋转体,牛顿第二定律的对应部分在方程6-2中以角动量的变化率表示为:

其中是施加在主体上绕旋转轴的净扭矩.

旋转机械的角速度通常以rpm(每分钟转数)表示,记为.注意到速度是单位时间内行进的距离,每转一圈行进的角距离是2𝜋,旋转机械的角速度是或,

考虑一个恒定的力沿切线方向作用在半径为的轴的外表面上,以 rpm旋转.注意,功W是力乘以距离,功率是单位时间内完成的功,因此力乘以速度,我们有.因此,由以 rpm 旋转的轴传递的动力.在施加扭矩M的影响下(图6-31),

质量为的物体在平移过程中的动能为.注意到,质量为的物体在距旋转轴距离为处的旋转动能为.旋转刚体绕轴旋转的总旋转动能是通过对整个物体的微分质量的旋转动能积分来确定的,

其中是物体的转动惯量,而𝜔是角速度.

在旋转运动过程中,即使速度大小保持不变,速度方向也会发生变化.速度是一个矢量,因此方向的变化构成了速度随时间的变化,从而构成了加速度.这称为**向心加速度**.它的大小是,

向心加速度指向旋转轴(与径向加速度相反),因此径向加速度为负.注意到加速度是力的常数倍,向心加速度是作用在物体上的力朝向旋转轴的结果,称为**向心力**,其大小为.切向和径向加速度彼此垂直(因为径向和切向方向是垂直的),总线性加速度由它们的矢量和决定,.对于以恒定角速度旋转的物体,唯一的加速度是向心加速度.向心力不会产生扭矩,因为它的作用线与旋转轴相交.

**6-6 角动量方程** 2021年7月12日18点21分

第6-4节中讨论的线性动量方程可用于确定流动流的线性动量与合力之间的关系.许多工程问题涉及流的线性动量的矩,以及由它们引起的旋转效应.此类问题最好通过角动量方程(也称为**动量矩方程**)进行分析.通过角动量方程分析了一类重要的流体设备,称为涡轮机,包括离心泵,涡轮机和风扇.

力关于点O的**力矩**是矢量(或叉)积(图6-32)

其中是从点到的作用线上任意点的位置矢量.两个矢量的矢量积是一个矢量,其作用线垂直于包含交叉矢量(在这种情况下为和)的平面,其大小为,

其中是矢量和的作用线之间的夹角.因此,关于点的力矩大小等于力的大小乘以力的作用线到物体的法向距离O点.力矩矢量M的意义由右手定则确定:当右手手指向力倾向于引起旋转的方向弯曲时,拇指指向力矩矢量的方向(图6-33).请注意,作用线通过O点的力产生关于O点的零力矩.

和动量矢量的矢量积给出关于O点的**动量力矩**,也称为**角动量**,如下所示:

因此,表示单位质量的角动量,微分质量的角动量为.那么系统的角动量由积分确定为,

动量矩的变化率为,

系统的角动量方程在方程6-2中表示为,

其中是施加在系统上的净扭矩或力矩,它是作用在系统上的所有力的力矩的矢量和,是系统的变化率系统的角动量.方程6-45被表述为**系统角动量的变化率等于作用在系统上的净扭矩**.该方程适用于固定质量和惯性参考系,即固定或以恒定速度沿直线路径移动的参考系.

角动量方程的一般控制体积公式是通过在一般雷诺输运定理中设置和来获得的.它给出(图6-34)

这个方程的左边是,从方程6-45,等于.代入,一般控制体积(静止或移动,固定形状或扭曲)的角动量方程是

用文字表述为,

同样,是相对于控制面的流体速度(用于流体穿过控制面的所有位置的质量流量计算),是从固定参考看的流体速度框架.乘积表示通过进入或离开控制体积的质量流量,具体取决于符号.

对于固定的控制体积(控制体积没有运动或变形),,角动量方程变为,

另外,请注意,作用在控制体积上的力包括作用在控制体积整个物体上的物体力,例如重力,以及作用在控制面上的表面力,例如在控制面上的压力和反作用力.接触.净扭矩包括这些力的力矩以及施加在控制体积上的扭矩.

**特例**

在稳流过程中,控制体积内的角动量量保持恒定,因此控制体积内容物的角动量时间变化率为零.则,

在许多实际应用中,流体在一定数量的入口和出口处穿过控制体积的边界,并且可以方便地将面积积分替换为以横截面的平均特性表示的代数表达式流体进入或离开控制体积的区域.在这种情况下,角动量流速可以表示为流出和流入流的角动量之差.此外,在许多情况下,力臂要么沿入口或出口恒定(如在径向流涡轮机中),要么与入口或出口管的直径相比较大(如在旋转草坪洒水器中,图6-35).在这种情况下,的平均值用于整个入口或出口的横截面积.然后,根据入口和出口的平均特性,角动量方程的近似形式变为,

您可能想知道为什么我们没有在方程6-50中引入校正因子,就像我们为能量守恒(第5章)和线性动量守恒(第6-4节)所做的那样.原因是和的叉积取决于问题几何,因此,这样的校正因子会因问题而异.因此,虽然我们可以很容易地为完全发展的管流计算动能通量校正因子和动量通量校正因子,它们可以应用于各种问题,但我们不能为角动量计算.幸运的是,在许多具有实际工程意义的问题中,与使用半径和速度平均值相关的误差很小,方程6-50的近似值是合理的.

如果流动是稳定的,方程6-50进一步简化为(图6-36),

方程6-51表明在稳定流动期间作用在控制体积上的净扭矩等于流出和流入角动量流量之间的差值.该语句也可以针对任何指定的方向表达.请注意,公式6-51中的速度是相对于惯性坐标系的速度.

在许多问题中,所有重要的力和动量流都在同一平面内,因此所有的力矩都在同一平面上并围绕同一轴产生.对于这种情况,公式6-51可以用标量形式表示为,

其中表示发生力矩的点与力或速度的作用线之间的平均法向距离前提是遵守力矩的符号约定.也就是说,逆时针方向的所有力矩都是正的,顺时针方向的所有力矩都是负的.

**没有外部矩的流动**

当没有施加外力矩时,角动量方程方程6-50简化为,

这是角动量守恒原理的一个表达式,可以表述为在没有外力矩的情况下,控制体积的角动量变化率等于输入角动量通量和输出角动量通量之差.

当控制体积的转动惯量保持恒定时,方程6-53右侧的第一项变为转动惯量乘以角加速度.因此,在这种情况下,控制体积可以被视为一个实体,其净扭矩为

(由于角动量的变化)作用于它.当火箭在与运动方向不同的方向上发射时,这种方法可用于确定航天器和飞机的角加速度.

**径向流动装置**

许多旋流设备,如离心泵和风扇,涉及垂直于旋转轴的径向流动,称为径流设备(第14章).例如,在离心泵中,流体通过叶轮的眼沿轴向进入设备,当它流过叶轮叶片之间的通道时向外转向,收集在涡旋中,并沿切线方向放电,如图6-37所示.使用线性动量方程很容易分析轴流装置.但是径向流装置涉及流体角动量的大变化,最好借助角动量方程进行分析.

为了分析离心泵,我们选择包围叶轮截面的环形区域作为控制体积,如图6-38所示.请注意,平均流速通常在叶轮截面的入口和出口处都有法向分量和切向分量.此外,当轴以角速度𝜔旋转时,叶轮叶片在入口处具有切向速度,在出口处具有切向速度.对于稳定的,不可压缩的流动,质量守恒方程写为,

其中和分别是的入口处和的出口处的流动宽度.(注意实际圆周截面积略小于,由于叶片厚度不为零.)那么绝对速度的平均法向分量和可以用体积流量表示为

法向速度分量和以及作用在内外圆周区域上的压力都通过轴心,因此它们对原点附近的扭矩没有贡献.那么只有切向速度分量对扭矩有贡献,角动量方程对控制体积的应用给出,

这被称为**欧拉涡轮机方程**.当绝对流速方向与径向之间的角度和已知时,方程6-57变为,

在切向流体速度在入口和出口处均等于叶片角速度的理想情况下,我们有和,扭矩变为,

其中是叶片的角速度.当扭矩已知时,轴功率由确定.